UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01-19 G 18 Bis B-20
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

**Epreuve du 2$^{\text{ème}}$ groupe**

# M A T H E M A T I Q U E S

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.**
**Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.**
**Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n$^0$ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)**

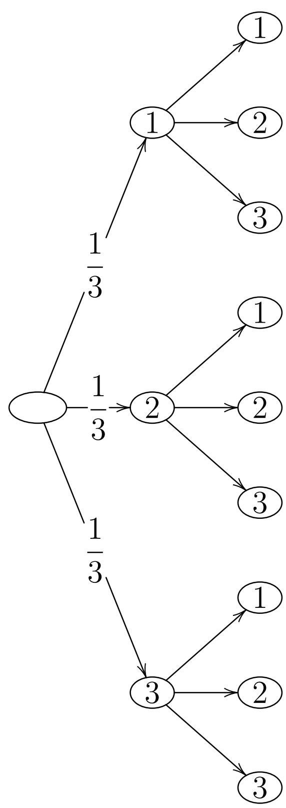
CORRIGE

## Exercice 1.

Un dé à jouer parfait a 6 faces numérotées $1, 1, 2, 2, 3, 3$.

On lance deux fois de suite le dé et on note $a$ le résultat du premier lancer et $b$ celui du deuxième lancer. On note $A$ l'événement « La somme $a + b$ est égale à 4. » et $B$ l'événement « Le produit $ab$ est égale à 4. »

**1.**




Les couples $(a, b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $a + b = 4$ sont $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ ; donc $p(A) = 3 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Le couple $(a, b)$ d'entiers naturels tels que $ab = 4$ est $(2, 2)$ ; donc $p(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

On sait que : $p(A/\overline{B}) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})}$.

Or, $A \cap \overline{B}$ est l'événement "La somme $a+b$ vaut 4 et le produit $ab$ est différent de 4". Il est donc réalisé par les couples $(a, b)$ d'entiers naturels $(1, 3)$ et $(3, 1)$ ; donc $p(A \cap \overline{B}) = p(1, 3) + p(3, 1) = 2 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$. Par conséquent :

$$p(A/\overline{B}) = \frac{2 \times \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}.$$

**2. a.** L'épreuve qui consiste à lancer le dé peut être considérée comme une épreuve de Bernouilli dont le succès est l'événement $A$. Cette épreuve étant effectuée $n$ fois de suite (et de manière indépendante), on a un schéma de Bernouilli. dans ce cas :

$$\begin{aligned} p(A_n) &= C_n^2 p(A)^2 (1-p)^{n-2} \\ &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ &= \frac{n(n-1)}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

**b.** Il est plus facile de calculer $p(\overline{B_n})$ car $\overline{B_n}$ est l'événement « obtenir 0 fois une somme égale à 4. »

$$p(\overline{B_n}) = C_n^0 p(A)^0 (1 - p(A))^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{et } p(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Pour que $p(B_n)$ soit $\geq 0.99$ il faut et il suffit que $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \geq 0.99$ c'est à dire $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq 0.01$ ou encore $n\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \leq \ln 0.01$.

Finalement $n \geq \dfrac{\ln 0.01}{\ln 2 - \ln 3} \sim 11.35$. On peut donc prendre pour valeur minimale $n = 12$.

**Exercice 2.**

**1.** On a : $s(A) = I$ et $s(B) = K$, donc :
Le rapport de $s$ est $k = \dfrac{IK}{AB} = \dfrac{1}{2}$ et l'angle de $s$ est $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IK}) = \dfrac{\pi}{2}$ mod $(2\pi)$.

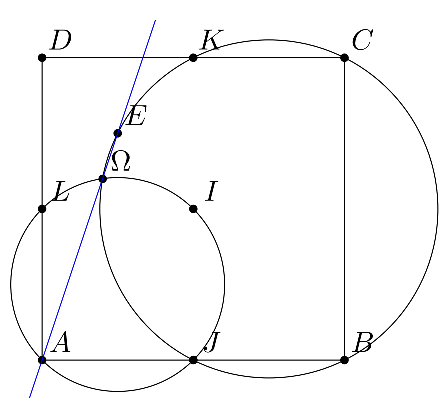
**2.** On a $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) =$ angle de $s = \dfrac{\pi}{2}$ ; donc $\Omega$ appartient au cercle de diamètre $[AI]$.
De même, $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega K}) =$ angle de $s = \dfrac{\pi}{2}$ ; donc $\Omega$ appartient au cercle de diamètre $[BK]$.
$\Omega$ appartient bien l'intersection de ces deux cercles.
$\Omega$ est distinct de $J$ car $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JI}) = -\dfrac{\pi}{2}$

**3. a.** Comme l'angle de $s$ est $\dfrac{\pi}{2}$, l'image de la droite $(AC)$ est la droite perpendiculaire à $(AC)$ passant par $I$, image de $A$. L'image de $(AC)$ est donc la droite $(ID) = (BD)$.
De même, l'image de la droite $(BC)$ est la droite perpendiculaire à $(BC)$ passant par $K$, image de $B$. L'image de $(BC)$ est donc la droite $(KD) = (CD)$.

Le point $C$, intersection des droites $(AC)$ et $(BC)$, a pour image l'intersection des images de ces droites ; donc $s(C) = (CD) \cap (BD) = D$.

**b.** Le point $I$, milieu du segment $[AC]$ a pour image le milieu des images des points $A$ et $C$ ; donc $E = s(I) =$ milieu de $[ID]$.

**4.** La transformation $t = s \circ s$ est la similitude de centre $\Omega$, de rapport $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ et $2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$.
Or $s \circ s(A) = s(I) = E$. Comme l'angle de $s \circ s$ est $\pi$, $\Omega$ appartient à la droite $(AI)$ ; autrement dit, les points $A, \Omega$ et $E$ sont alignés.
On a précisément $\overrightarrow{\Omega E} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$.




**Exercice 3.**

**1. a.** Les fonctions sin, cos sont périodiques de période $2\pi$.

Les fonctions $t \to \sin 3t, t \to \cos 3t$ sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

Donc les fonctions $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ ont une période commune égale à $2\pi$.

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}, M(t) = M(t + 2\pi)$. En plus, on peut choisir pour domaine d'étude de la courbe tout intervalle de longueur $2\pi$.

**b.** La fonction sin est impaire et la fonction cos est paire.

Donc $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axes des abscisses.

En plus, on peut choisir le domaine d'étude de la courbe sera contenu dans $\mathbb{R}_+$

**c.** On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\sin(\pi - t) = \sin t, \cos(\pi - t) = -\cos t, \sin(3\pi - 3t) = \sin 3t \text{ et } \cos(3\pi - 3t) = -\cos 3t$$

Donc $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Les points $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axes des ordonnées.

On pourra donc choisir comme domaine d'étude de la courbe $E = [0, \pi/2]$

**2.** Les fonctions $x$ et $y$ sont continues et dérivables dans $E$ et pour tout $t \in E$,

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x'(t) & = & -3\sin t + 3\sin 3t & = & 3(\sin 3t - \sin t) & = & 6\cos 2t \sin t \\ y'(t) & = & 3\cos t - 3\cos 3t & = & 3(\cos t - \cos 3t) & = & 6\sin 2t \sin t \end{array}\right.$$

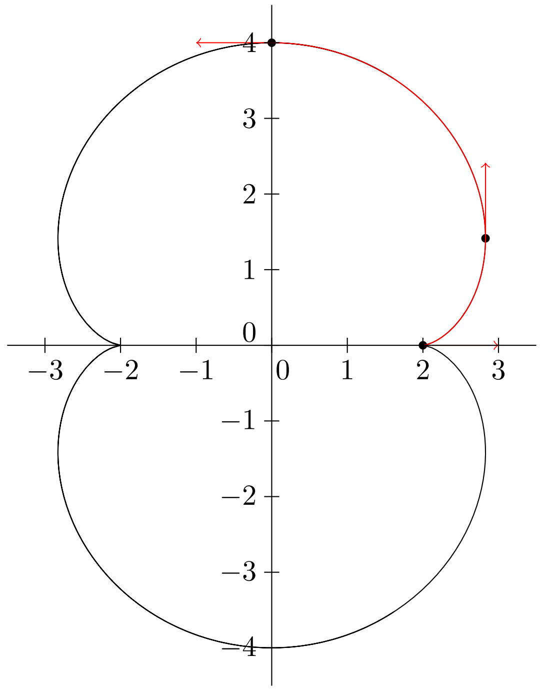
$x'$ s'annule en $0, \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$. $x'(t)$ a même signe que $\cos 2t$.

$y'$ s'annule en 0 et $\dfrac{\pi}{4}$. $y'(t)$ positif.

Voici le tableau de variations de $x$ et de $y$.

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $x$ | $2$ | $\nearrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $0$ | | $+$ | | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $4$ |

**3.** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle fermé $[-\pi, \pi]$.




## Exercice 4.

**1. a.** Sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g$ est dérivable car c'est la composée de deux fonctions dérivable et

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, g'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-cos^2x}} \times (-sinx) = \frac{2}{\pi}.$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g'(x) = \dfrac{\pi}{2}$, donc, $g$ est dérivable à droite en 0 et à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$. D'où g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $g'(x) = \dfrac{2}{\pi}$.

**b.** $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, g'(x) = \dfrac{2}{\pi}$. Donc, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, g(x) = \dfrac{2}{\pi} \times x + C$, où $C$ est une constante réelle. La fonction $g$ étant continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$, on a : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g(\dfrac{\pi}{2}) = f(0) = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi}{2} + C$. On en déduit que $C = 0$. D'où $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, g(x) = \dfrac{2}{\pi} \times x$.
Et comme la formule marche pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], g(x) = \frac{2}{\pi} \times x.$$

$f(1) = g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.
On a maintenant : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], g(x) = \dfrac{2}{\pi} \times x$

**c.** $f$ est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ (car $f'(x) < 0$ sur $]0,1[$). Donc $f$ est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$ car $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
Calculons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
Soit $x \in [0,1]$. On cherche $s \in [0,1]$ tel que $f(s) = x$.
Or, pour tout $s \in [0,1]$, il existe un unique réel $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $cost = s$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(s) = x &\iff f(cost) = x \\ &\iff g(t) = x \\ &\iff \frac{2}{\pi}t = x \\ &\iff t = \pi\frac{x}{2} \\ &\iff s = cos(\pi\frac{x}{2}). \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in [0,1]\,, f^{-1}(x) = cos(\pi\frac{x}{2})$

**2. a.** $h$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car c'est la somme de composées de fonctions dérivable et

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,, h'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

**b.** Sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,, h'(x) = 0$. Donc $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,, h(x) = C$ où C est une constante réelle.

La fonction $h$ étant continue à droite en 0, on en déduit que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = C = h(\frac{\pi}{2}) = f(0) + f(1) = 1$.

Pour des raisons de continuité de $h$ à droite en 0 et à gauche en $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,, h(x) = 1.$$